

Capítulo IV

INTEGRAL INDEFINIDA

1. Integración Inmediata

1º. Reglas principales para la integración.

1) Si $F'(x) = f(x)$, entonces

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

donde C es una constante arbitraria.

2) $\int A f(x) dx = A \int f(x) dx$, donde A es una constante.

3) $\int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$.

4) Si $\int f(x) dx = F(x) + C$ y $u = \varphi(x)$, se tiene,

$$\int f(u) du = F(u) + C.$$

En particular,

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \quad (a \neq 0).$$

2º. Tabla de integrales inmediatas.

I. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$

II. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$

III. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arccotg} \frac{x}{a} + C_1 \quad (a \neq 0).$

IV. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a \neq 0).$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (a \neq 0).$$

V. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C \quad (a \neq 0).$

VI. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + C = -\operatorname{arccos} \frac{x}{a} + C_1 \quad (a > 0).$

$$\text{VII. } \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0); \quad \int e^x dx = e^x + C.$$

$$\text{VIII. } \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C.$$

$$\text{IX. } \int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\text{X. } \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$\text{XI. } \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$\text{XII. } \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C = \ln |\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x| + C.$$

$$\text{XIII. } \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C = \ln |\operatorname{tg} x + \sec x| + C.$$

$$\text{XIV. } \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$$

$$\text{XV. } \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$$

$$\text{XVI. } \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$$

$$\text{XVII. } \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

$$\text{Ejemplo 1. } \int (ax^2 + bx + c) dx = \int ax^2 dx + \int bx dx + \int c dx = \\ = a \int x^2 dx + b \int x dx + c \int dx = a \frac{x^3}{3} + b \frac{x^2}{2} + cx + C.$$

Hallar las siguientes integrales, empleando para ello las reglas principales 1), 2) y 3) y las fórmulas de integración.

$$1031. \int 5a^2 x^6 dx.$$

$$1032. \int (6x^2 + 8x + 3) dx.$$

$$1033. \int x(x+a)(x+b) dx.$$

$$1034. \int (a + bx^2)^2 dx.$$

$$1035. \int \sqrt{2px} dx.$$

$$1036. \int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}.$$

$$1037. \int (nx)^{\frac{1-n}{n}} dx.$$

$$1038. \int (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3 dx.$$

$$1039. \int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1) dx.$$

$$1040. \int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$1041. \int \frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{x}} dx.$$

$$1042. \int \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}} dx.$$

$$1043. \int \frac{dx}{x^2+7}.$$

$$1044. \int \frac{dx}{x^2-10}.$$

$$1045. \int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}.$$

$$1046. \int \frac{dx}{\sqrt{8+x^2}}.$$

$$1047. \int \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx.$$

$$1049. a) \int \operatorname{ctg}^2 x dx;$$

$$1048^*. a) \int \operatorname{tg}^2 x dx;$$

$$b) \int \operatorname{cth}^2 x dx.$$

$$b) \int \operatorname{th}^2 x dx.$$

$$1050. \int 3^x e^x dx.$$

✓

3°. Integración mediante la introducción bajo el signo de la diferencial. La regla 4) amplía considerablemente la tabla de las integrales inmediatas. Precisamente, gracias a esta regla, la tabla de las integrales es válida, independientemente de que la variable de integración sea una variable independiente o una función diferenciable.

Ejemplo 2.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}} &= \frac{1}{5} \int (5x-2)^{-\frac{1}{2}} d(5x-2) = \\ &= \frac{1}{5} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{5} \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{5} \frac{(5x-2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5} \sqrt{5x-2} + C, \end{aligned}$$

donde se supuso $u=5x-2$. Se empleó la regla 4) y la integral I de la tabla.

Ejemplo 3. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1+(x^2)^2}} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + \sqrt{1+x^4}) + C.$

De forma implícita, se consideró que $u=x^2$ y se empleó la regla 4) y la integral V de la tabla.

Ejemplo 4. $\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3} d(x^3) = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$ de acuerdo con la regla 4) y la integral VII de la tabla.

En los ejemplos 2, 3 y 4, antes de aplicar las integrales de la tabla, transformamos la integral dada a la forma

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(u) du, \text{ donde } u = \varphi(x).$$

Este tipo de transformación se llama *introducción bajo el signo de la diferencial*.

Es conveniente señalar las transformaciones de las diferenciales que se emplean con frecuencia, como son las que se utilizaron en los ejemplos 2 y 3:

a) $dx = \frac{1}{a} d(ax+b)$ ($a \neq 0$); b) $x dx = \frac{1}{2} d(x^2)$ y otras semejantes.

Hallar las siguientes integrales, empleando para ello las reglas principales y las fórmulas de integración.

1051**. $\int \frac{a dx}{a-x}$

1063*. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx.$

1052**. $\int \frac{2x+3}{2x+1} dx.$

1064. $\int \frac{\sqrt{x} + \ln x}{x} dx.$

*1053. $\int \frac{1-3x}{3+2x} dx.$

1065. $\int \frac{dx}{3x^2+5}.$

*1054. $\int \frac{x dx}{a+bx}.$

1066. $\int \frac{dx}{7x^2-8}.$

1055. $\int \frac{ax+b}{\alpha x+\beta} dx.$

1067. $\int \frac{dx}{(a+b)-(a-b)x^2}$
($0 < b < a$).

1056. $\int \frac{x^2+1}{x-1} dx.$

1068. $\int \frac{x^2}{x^2+2} dx.$

1057. $\int \frac{x^2+5x+7}{x+3} dx.$

1069. $\int \frac{x^3}{a^2-x^2} dx.$

1058. $\int \frac{x^4+x^2+1}{x-1} dx.$

1070. $\int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4} dx.$

1059. $\int \left(a + \frac{b}{x-a}\right)^2 dx.$

1071. $\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}}.$

1060*. $\int \frac{x}{(x+1)^2} dx.$

1072. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}.$

1061. $\int \frac{b dy}{\sqrt{1-y}}.$

1073. $\int \frac{2x-5}{3x^2-2} dx.$

1062. $\int \sqrt{a-bx} dx.$

1074. $\int \frac{3-2x}{5x+7} dx.$
 1075. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{5x^2+1}} dx.$
 1076. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}} dx.$
 1077. $\int \frac{x dx}{x^2-5}.$
 1078. $\int \frac{x dx}{2x^2+3}.$
 1079. $\int \frac{ax+b}{a^2x^2+b^2} dx.$
 1080. $\int \frac{x dx}{\sqrt{a^4-x^4}}.$
 1081. $\int \frac{x^2}{1+x^6} dx.$
 1082. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6-1}}.$
 1083. $\int \sqrt{\frac{\arcsen x}{1-x^2}} dx.$
 1084. $\int \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{4+x^2} dx.$
 1085. $\int \frac{x - \sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2} dx.$
 1086. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)\ln(x+\sqrt{1+x^2})}}.$
 1087. $\int ae^{-mx} dx.$
 1088. $\int 4^{2-3x} dx.$
 1089. $\int (e^t - e^{-t}) dt.$
 1090. $\int (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})^2 dx.$
 1091. $\int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x} dx.$
 1092. $\int \frac{a^{2x}-1}{\sqrt{a^x}} dx.$
 1093. $\int e^{-(x^2+1)x} dx.$
 1094. $\int x \cdot 7^{x^2} dx.$
 1095. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx.$
 1096. $\int 5^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$
 1097. $\int \frac{e^x}{e^x-1} dx.$
 1098. $\int e^x \sqrt{a - be^x} dx.$
 1099. $\int (e^{\frac{x}{a}} + 1)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{x}{a}} dx.$
 1100*. $\int \frac{dx}{2^x+3}.$
 1101. $\int \frac{a^x dx}{1+a^{2x}}.$
 1102. $\int \frac{e^{-bx}}{1-e^{-2bx}} dx.$
 1103. $\int \frac{e^t dt}{\sqrt{1-e^{2t}}}$
 1104. $\int \operatorname{sen}(a+bx) dx.$
 1105. $\int \cos \frac{x}{\sqrt{2}} dx.$
 1106. $\int (\cos ax + \operatorname{sen} ax)^2 dx.$
 1107. $\int \cos \sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$
 1108. $\int \operatorname{sen}(\lg x) \frac{dx}{x}.$
 1109*. $\int \operatorname{sen}^2 x dx.$
 1110*. $\int \cos^2 x dx.$
 1111. $\int \sec^2(ax+b) dx.$

1112. $\int \operatorname{ctg}^2 ax \, dx.$
 1113. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} \frac{x}{a}}.$
 1114. $\int \frac{dx}{3 \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right)}.$
 1115. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} (ax+b)}.$
 1116. $\int \frac{x \, dx}{\cos^2 x^2}.$
 1117. $\int x \operatorname{sen} (1-x^2) \, dx.$
 1118. $\int \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x \sqrt{2}} - 1 \right)^2 dx.$
 1119. $\int \operatorname{tg} x \, dx.$
 1120. $\int \operatorname{ctg} x \, dx.$
 1121. $\int \operatorname{ctg} \frac{x}{a-b} \, dx.$
 1122. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} \frac{x}{5}}.$
 1123. $\int \operatorname{tg} \sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$
 1124. $\int x \operatorname{ctg} (x^2+1) \, dx.$
 1125. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x}.$
 1126. $\int \cos \frac{x}{a} \operatorname{sen} \frac{x}{a} \, dx.$
 1127. $\int \operatorname{sen}^3 6x \cos 6x \, dx.$
 1128. $\int \frac{\cos ax}{\operatorname{sen}^5 ax} \, dx.$
 1129. $\int \frac{\operatorname{sen} 3x}{3 + \cos 3x} \, dx.$
 1130. $\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}} \, dx.$
 1131. $\int \sqrt{1 + 3 \cos^2 x} \operatorname{sen} 2x \, dx.$
 1132. $\int \operatorname{tg}^3 \frac{x}{3} \sec^2 \frac{x}{3} \, dx.$
 1133. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} \, dx.$
 1134. $\int \frac{\operatorname{ctg}^{\frac{2}{3}} x}{\operatorname{sen}^2 x} \, dx.$
 1135. $\int \frac{1 + \operatorname{sen} 3x}{\cos^2 3x} \, dx.$
 1136. $\int \frac{(\cos ax + \operatorname{sen} ax)^2}{\operatorname{sen} ax} \, dx.$
 1137. $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 3x}{b-a \operatorname{ctg} 3x} \, dx.$
 1138. $\int (2 \operatorname{sh} 5x - 3 \operatorname{ch} 5x) \, dx.$
 1139. $\int \operatorname{sh}^2 x \, dx.$
 1140. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}.$
 1141. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}.$
 1142. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}.$
 1143. $\int \operatorname{th} x \, dx.$
 1144. $\int \operatorname{cth} x \, dx.$

Hallar las siguientes integrales indefinidas:

1145. $\int x \sqrt[5]{5-x^2} \, dx.$
 1146. $\int \frac{x^3-1}{x^4-4x+1} \, dx.$
 1147. $\int \frac{x^3}{x^8+5} \, dx.$
 1148. $\int x e^{-x^2} \, dx.$

1149. $\int \frac{3 - \sqrt{2+3x^2}}{2+3x^2} dx.$
1150. $\int \frac{x^3-1}{x+1} dx.$
1151. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x}}.$
1152. $\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{x+\cos x} dx.$
1153. $\int \frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{ctg} 3x}{\operatorname{sen} 3x} dx.$
1154. $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}.$
1155. $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 2}} dx.$
1156. $\int \left(2 + \frac{x}{2x^2+1}\right) \frac{dx}{2x^2+1}.$
1157. $\int a^{\operatorname{sen} x} \cos x dx.$
1158. $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}} dx.$
1159. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}.$
1160. $\int \operatorname{tg}^2 ax dx.$
1161. $\int \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} dx.$
1162. $\int \frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{4-\operatorname{tg}^2 x}}.$
1163. $\int \frac{dx}{\cos \frac{x}{a}}.$
1164. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx.$
1165. $\int \operatorname{tg} \sqrt{x-1} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}.$
1166. $\int \frac{x dx}{\operatorname{sen}(x^2)}.$
1167. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x} + x \ln(1+x^2) + 1}{1+x^2} dx.$
1168. $\int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x} dx.$
1169. $\int \frac{\left(1 - \operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}{\operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{2}}} dx.$
1170. $\int \frac{x^2}{x^2-2} dx.$
1171. $\int \frac{(1+x^2)}{x(1+x^2)} dx.$
1172. $\int e^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{sen} 2x dx.$
1173. $\int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}} dx.$
1174. $\int \frac{dx}{e^x+1}.$
1175. $\int \frac{dx}{(a+b)+(a-b)x^2}$
($0 < b < a$).
1176. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-2}} dx.$
1177. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} ax \cos ax}.$
1178. $\int \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right) dt.$
1179. $\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 x)}.$
1180. $\int \frac{\arccos \frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}} dx.$
1181. $\int e^{-\operatorname{tg} x} \sec^2 x dx.$
1182. $\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{2-\operatorname{sen}^4 x}} dx.$
1183. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}.$
1184. $\int \frac{\operatorname{arcsen} x + x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$
1185. $\int \frac{\sec x \operatorname{tg} x}{\sqrt{\sec^2 x + 1}} dx.$

$$1186. \int \frac{\cos 2x}{4 + \cos^2 2x} dx.$$

$$1189. \int x^2 \operatorname{ch} (x^3 + 3) dx.$$

$$1187. \int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}.$$

$$1190. \int \frac{3^{\operatorname{th} x}}{\operatorname{ch}^2 x} dx.$$

$$1188. \int \sqrt{\frac{\ln (x + \sqrt{x^2 + 1})}{1 + x^2}} dx.$$

§ 2. Método de sustitución

1°. Sustitución o cambio de variable en la integral indefinida. Poniendo

$$x = \varphi(t),$$

donde t es una nueva variable y φ una función continua diferenciable, tendremos:

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (1)$$

La función φ se procura elegir de tal manera, que el segundo miembro de la fórmula (1) tome una forma más adecuada para la integración.

Ejemplo 1. Hallar

$$\int x \sqrt{x-1} dx.$$

Solución. Es natural poner $t = \sqrt{x-1}$, de donde $x = t^2 + 1$, y $dx = 2t dt$. Por consiguiente:

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{x-1} dx &= \int (t^2 + 1) t \cdot 2t dt = 2 \int (t^4 + t^2) dt = \\ &= \frac{2}{5} t^5 + \frac{2}{3} t^3 + C = \frac{2}{5} (x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

Algunas veces se emplea la sustitución del tipo

$$u = \varphi(x).$$

Supongamos, que hemos conseguido transformar la expresión subintegral $f(x) dx$ a la forma siguiente:

$$f(x) dx = g(u) du, \text{ donde } u = \varphi(x).$$

Si la $\int g(u) du$ es conocida, es decir,

$$\int g(u) du = F(u) + C,$$

tendremos

$$\int f(x) dx = F[\varphi(x)] + C$$

Este procedimiento es el que ya utilizamos en el § 1, 3°.

Los ejemplos 2, 3 y 4 (§ 1) se podrían haber resuelto de la forma siguiente:

Ejemplo 2. $u=5x-2$; $du=5dx$; $dx=\frac{1}{5}du$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}} = \frac{1}{5} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{5} \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5} \sqrt{5x-2} + C.$$

Ejemplo 3. $u=x^2$; $du=2x dx$; $x dx=\frac{du}{2}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^4}} &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{1+u^2}) + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + \sqrt{1+x^4}) + C. \end{aligned}$$

Ejemplo 4. $u=x^3$; $du=3x^2 dx$; $x^2 dx=\frac{du}{3}$.

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{x^3} + C.$$

2°. Sustituciones trigonométricas.

1) Si la integral contiene el radical $\sqrt{a^2-x^2}$, generalmente se hace $x=a \operatorname{sen} t$; de donde

$$\sqrt{a^2-x^2} = a \cos t.$$

2) Si la integral contiene el radical $\sqrt{x^2-a^2}$, se hace $x=a \sec t$; de donde

$$\sqrt{x^2-a^2} = a \operatorname{tg} t.$$

3) Si la integral contiene el radical $\sqrt{x^2+a^2}$, se hace $x=a \operatorname{tg} t$; de donde

$$\sqrt{x^2+a^2} = a \sec t.$$

Hay que advertir, que las sustituciones trigonométricas no son siempre las más convenientes.

En ciertos casos, en lugar de las sustituciones trigonométricas, es preferible emplear las *sustituciones hiperbólicas*, cuyo carácter es análogo (véase el ej. 1209).

En el § 9 se trata más detalladamente de las sustituciones trigonométricas e hiperbólicas.

Ejemplo 5. Hallar

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} dx.$$

Solución. Hacemos $x=\operatorname{tg} t$. Por consiguiente, $dx=\frac{dt}{\cos^2 t}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} dx &= \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 t + 1}}{\operatorname{tg}^2 t} \frac{dt}{\cos^2 t} = \int \frac{\operatorname{sen} t \cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t} \frac{dt}{\cos^2 t} = \\ &= \int \frac{dt}{\operatorname{sen}^2 t \cos t} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t \cdot \cos t} dt = \int \frac{dt}{\cos t} + \int \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t} dt = \end{aligned}$$

$$= \ln | \operatorname{tg} t + \sec t | - \frac{1}{\operatorname{sen} t} + C = \ln | \operatorname{tg} t + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} | - \\ - \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}}{\operatorname{tg} t} + C = \ln | x + \sqrt{x^2 + 1} | - \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} + C.$$

1191. Hallar las siguientes integrales, utilizando para ello las sustituciones indicadas:

- a) $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 2}}, \quad x = \frac{1}{t};$
 b) $\int \frac{dx}{e^x + 1}, \quad x = -\ln t;$
 c) $\int x(5x^2 - 3)^7 dx, \quad 5x^2 - 3 = t;$
 d) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}, \quad t = \sqrt{x+1};$
 e) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}}, \quad t = \operatorname{sen} x.$

Hallar las integrales siguientes, empleando para ello las sustituciones más adecuadas:

1192. $\int x(2x+5)^{10} dx$ 1197. $\int \frac{(\operatorname{arcsen} x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$
 1193. $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx.$ 1198. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx.$
 1194. $\int \frac{dx}{x \sqrt{2x+1}}.$ 1199. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx.$
 1195. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}.$ 1200*. $\int \frac{dx}{x \sqrt{1+x^2}}.$
 1196. $\int \frac{\ln 2x}{\ln 4x} \frac{dx}{x}.$

Hallar las siguientes integrales, empleando sustituciones trigonométricas:

1201. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$ 1205. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx.$
 1202. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{2-x^2}}.$ 1206*. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}}.$
 1203. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx.$ 1207. $\int \sqrt{1-x^2} dx.$
 1204*. $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}$

1208. Calcular la integral

$$\int \frac{dx}{x(1-x)}$$

valiéndose de la sustitución $x = \operatorname{sen}^2 t$.

1209. Hallar

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx,$$

empleando la sustitución hiperbólica $x = a \operatorname{sh} t$.

Solución. Tenemos, $\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{sh}^2 t} = a \operatorname{ch} t$ y $dx = a \operatorname{ch} t dt$.
De donde,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 + x^2} dx &= \int a \operatorname{ch} t \cdot a \operatorname{ch} t dt = \\ &= a^2 \int \operatorname{ch}^2 t dt = a^2 \int \frac{\operatorname{ch} 2t + 1}{2} dt = \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2t + t \right) + C = \\ &= \frac{a^2}{2} (\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t + t) + C. \end{aligned}$$

Como

$$\operatorname{sh} t = \frac{x}{a}, \quad \operatorname{ch} t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a}$$

y

$$e^t = \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t = \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a},$$

tendremos en definitiva:

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln (x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C_1,$$

donde $C_1 = C - \frac{a^2}{2} \ln a$ es una nueva constante arbitraria.

1210. Hallar

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}},$$

haciendo $x = a \operatorname{ch} t$.

§ 3. Integración por partes

Fórmula para la integración por partes. Si $u = \varphi(x)$ y $v = \psi(x)$ son funciones diferenciables, tendremos que

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Ejemplo 1. Hallar

$$\int x \ln x dx.$$

Poniendo $u = \ln x$; $dv = x dx$, tendremos $du = \frac{dx}{x}$; $v = \frac{x^2}{2}$. De donde,

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

A veces, para reducir la integral dada a una inmediata, hay que emplear varias veces la fórmula de integración por partes. En algunos casos, valiéndose de la integración por partes, se obtiene una ecuación, de la que se determina la integral buscada.

Ejemplo 2. Hallar

$$\int e^x \cos x dx.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \int e^x \cos x dx &= \int e^x d(\sin x) = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x + \\ &+ \int e^x d(\cos x) = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx,$$

de donde

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C.$$

Hallar las siguientes integrales, utilizando la fórmula para la integración por partes:

1211. $\int \ln x dx.$

1220*. $\int x^3 e^{-\frac{x}{3}} dx.$

1212. $\int \operatorname{arctg} x dx.$

1221. $\int x \sin x \cos x dx.$

1213. $\int \operatorname{arcsen} x dx.$

1222*. $\int (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx.$

1214. $\int x \sin x dx.$

1223. $\int x^2 \ln x dx.$

1215. $\int x \cos 3x dx.$

1224. $\int \ln^2 x dx.$

1216. $\int \frac{x}{e^x} dx.$

1225. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx.$

1217. $\int x \cdot 2^{-x} dx.$

1226. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx.$

1218**. $\int x^2 e^{3x} dx.$

1227. $\int x \operatorname{arctg} x dx.$

1219*. $\int (x^2 - 2x + 5) e^{-x} dx.$

1228. $\int x \operatorname{arcsen} x dx.$

1229. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$ 1233. $\int 3^x \cos x dx.$
 1230. $\int \frac{x dx}{\operatorname{sen}^2 x}.$ 1234. $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx dx.$
 1231. $\int \frac{x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} dx.$ 1235. $\int \operatorname{sen}(\ln x) dx.$
 1232. $\int e^x \operatorname{sen} x dx.$

Hallar las siguientes integrales, empleando diferentes procedimientos:

1236. $\int x^3 e^{-x^2} dx.$ 1246. $\int \frac{\operatorname{arcsen} \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx.$
 1237. $\int e^{\sqrt{x}} dx.$ 1247. $\int x \operatorname{tg}^2 2x dx.$
 1238. $\int (x^2 - 2x + 3) \ln x dx.$ 1248. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{e^x} dx.$
 1239. $\int x \ln \frac{1-x}{1+x} dx.$ 1249. $\int \cos^2(\ln x) dx.$
 1240. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx.$ 1250**. $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx.$
 1241. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx.$ 1251*. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}.$
 1242. $\int x^2 \operatorname{arctg} 3x dx.$ 1252*. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$
 1243. $\int x (\operatorname{arctg} x)^2 dx.$ 1253*. $\int \sqrt{A+x^2} dx.$
 1244. $\int (\operatorname{arcsen} x)^2 dx.$ 1254*. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}.$
 1245. $\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{x^2} dx.$

§ 4. Integrales elementales que contienen un trinomio cuadrado

1°. Integrales del tipo $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx.$ El procedimiento principal de cálculo consiste en reducir el trinomio de segundo grado a la forma:

$$ax^2+bx+c=a(x+k)^2+l, \quad (1)$$

donde k y l son constantes. Para efectuar la transformación (1), lo más cómodo es completar cuadrados en el trinomio de segundo grado. También se puede emplear la sustitución

$$2ax+b=t.$$

Si $m=0$, reduciendo el trinomio de segundo grado a la forma (1), obtenemos las integrales inmediatas III o IV (véase § 1, 2º, tabla de las integrales elementales).

Ejemplo 1.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{2x^2-5x+7} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x^2-2\cdot\frac{5}{4}x+\frac{25}{16}\right)+\left(\frac{7}{2}-\frac{25}{16}\right)} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x-\frac{5}{4}\right)}{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{31}{16}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{\sqrt{31}}{4}} \operatorname{arctg} \frac{x-\frac{5}{4}}{\frac{\sqrt{31}}{4}} + C = \\ &= \frac{2}{\sqrt{31}} \operatorname{arctg} \frac{4x-5}{\sqrt{31}} + C.\end{aligned}$$

Si $m \neq 0$, del numerador se separa la derivada $2ax+b$ del trinomio de segundo grado

$$\begin{aligned}\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx &= \int \frac{\frac{m}{2a}(2ax+b) + \left(n-\frac{mb}{2a}\right)}{ax^2+bx+c} dx = \\ &= \frac{m}{2a} \ln |ax^2+bx+c| + \left(n-\frac{mb}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2+bx+c},\end{aligned}$$

y de esta forma nos encontramos con una integral como la que analizamos más arriba.

Ejemplo 2.

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{x^2-x-1} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2-1)-\frac{1}{2}}{x^2-x-1} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2-x-1| - \\ &- \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}} = \frac{1}{2} \ln |x^2-x-1| - \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}} \right| + C.\end{aligned}$$

2º. Integrales del tipo $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$.

Los métodos de cálculo son análogos a los examinados más arriba. En definitiva la integral se reduce a la V integral inmediata, si $a > 0$, y a la VI, si $a < 0$.

Ejemplo 3º.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\frac{25}{16}-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsen} \frac{4x-3}{5} + C.$$

Ejemplo 4°.

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}} = \\ = \sqrt{x^2+2x+2} + 2 \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}) + C.$$

3°. Integrales del tipo

$$\frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Utilizando la sustitución inversa

$$\frac{1}{mx+n} = t,$$

estas integrales se reducen al tipo 2°.

Ejemplo 5. Hallar

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

Solución. Ponemos

$$x+1 = \frac{1}{t},$$

de donde

$$dx = \frac{dt}{t^2}.$$

Tenemos:

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+1}} = -\frac{dt}{\sqrt{1-2t+2t^2}} = \\ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| t - \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 - t + \frac{1}{2}} \right| + \\ + C = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{x+1} \right| + C.$$

4°. Integrales del tipo $\int \sqrt{ax^2+bx+c} dx$. Completando cuadrados en el trinomio de segundo grado, esta integral se reduce a una de las dos integrales principales siguientes (véanse los Nos. Nos 1252 y 1253):

$$1) \int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsen \frac{x}{a} + C,$$

$$2) \int \sqrt{x^2+A} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2} \ln |x + \sqrt{x^2+A}| + C.$$

Ejemplo 6.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-2x-x^2} dx &= \int \sqrt{2-(1+x)^2} d(1+x) = \\ &= \frac{1+x}{2} \sqrt{1-2x-x^2} + \arcsen \frac{1+x}{\sqrt{2}} + C.\end{aligned}$$

Hallar las integrales:

1255. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}.$

1256. $\int \frac{dx}{x^2+2x}.$

1257. $\int \frac{dx}{3x^2-x+1}.$

1258. $\int \frac{x dx}{x^2-7x+13}.$

1259. $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5} dx.$

1260. $\int \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4} dx.$

1261. $\int \frac{x^2 dx}{x^2-6x+10}.$

1262. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}.$

1263. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$

1264. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}.$

1265. $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx.$

1266. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}} dx.$

1267. $\int \frac{x}{\sqrt{5x^2-2x-1}} dx.$

1268. $\int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}}.$

1269. $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2+x-1}}.$

1270. $\int \frac{dx}{(x-1) \sqrt{x^2-2}}.$

1271. $\int \frac{dx}{(x+1) \sqrt{x^2+2x}}.$

1272. $\int \sqrt{x^2+2x+5} dx.$

1273. $\int \sqrt{x-x^2} dx.$

2274. $\int \sqrt{2-x-x^2} dx.$

1275. $\int \frac{x dx}{x^4-4x^2+3}.$

1276. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x - 6 \operatorname{sen} x + 12} dx.$

1277. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}.$

1278. $\int \frac{\operatorname{sen} x dx}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \cos x + 1}}.$

1279. $\int \frac{\ln x dx}{x \sqrt{1-4 \ln x - \ln^2 x}}.$

§ 5. Integración de funciones racionales

1°. Método de los coeficientes indeterminados. La integración de una función racional, después de separar la parte entera, se reduce a la integración de una *fracción racional propia*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \quad (1)$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios enteros y el grado del numerador $P(x)$ es menor que el del denominador $Q(x)$.

Si

$$Q(x) = (x-a)^\alpha \dots (x-l)^\lambda,$$

donde $a, \dots, l$ son las diferentes raíces reales del polinomio $Q(x)$ y $\alpha, \dots, \lambda$ son números naturales (grados de multiplicidad de las raíces), la fracción (1) podrá descomponerse en fracciones simples:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \dots \\ \dots + \frac{L_1}{x-l} + \frac{L_2}{(x-l)^2} + \dots + \frac{L_\lambda}{(x-l)^\lambda}. \quad (2)$$

Para calcular los coeficientes indeterminados $A_1, A_2, \dots, L_\lambda$ ambas partes de la identidad (2) se reducen a la forma entera y, después, se igualan los coeficientes de cada una de las potencias iguales de la variable x (primer procedimiento). También se pueden calcular estos coeficientes igualando la x , en la igualdad (2) o en su equivalente, a ciertos números debidamente elegidos (segundo procedimiento).

Ejemplo 1. Hallar

$$\int \frac{x \, dx}{(x-1)(x+1)^2} = I.$$

Solución. Tenemos:

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2},$$

de donde

$$x \equiv A(x+1)^2 + B_1(x-1)(x+1) + B_2(x-1). \quad (3)$$

a) *Primer procedimiento para la determinación de los coeficientes.* Copiamos la identidad (3) dándole la forma

$$x \equiv (A+B_1)x^2 + (2A+B_2)x + (A-B_1-B_2).$$

Igualando los coeficientes de cada una de las potencias iguales de x , tenemos

$$0 = A+B_1; \quad 1 = 2A+B_2; \quad 0 = A-B_1-B_2.$$

De donde

$$A = \frac{1}{4}; \quad B_1 = -\frac{1}{4}; \quad B_2 = \frac{1}{2}.$$

b) *Segundo procedimiento para la determinación de los coeficientes.* Haciendo $x=1$ en la identidad (3), tendremos:

$$1 = A \cdot 4, \text{ es decir, } A = \frac{1}{4}.$$

Haciendo $x=-1$, tendremos:

$$-1 = -B_2 \cdot 2, \text{ es decir, } B_2 = \frac{1}{2}.$$

Haciendo después $x=0$, tendremos:

$$0 = A - B_1 - B_2,$$

es decir, $B_1 = A - B_2 = -\frac{1}{4}.$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{1}{4} \ln |x-1| - \frac{1}{4} \ln |x+1| - \frac{1}{2(x+1)} + C = \\ &= -\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Hallar

$$\int \frac{dx}{x^3 - 2x^2 + x} = I.$$

Solución. Teremos,

$$\frac{1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

y

$$1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx. \quad (4)$$

Al resolver este ejemplo, se recomienda combinar los dos procedimientos para la determinación de los coeficientes. Utilizando el segundo procedimiento, hacemos $x=0$ en la identidad (4) y obtenemos $1=A$. Luego, haciendo $x=1$, tendremos que $1=C$. Después, empleando el primer procedimiento, igualamos en la identidad (4) los coeficientes de x^2 . Tendremos:

$$0 = A + B, \text{ es decir, } B = -1.$$

De esta forma,

$$A=1, \quad B=-1 \text{ y } C=1.$$

Por consiguiente,

$$I = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} = \ln |x| - \ln |x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

Si el polinomio $Q(x)$ tiene raíces complejas $a \pm ib$ de multiplicidad k , en la descomposición (2) entran además fracciones simples de la forma

$$\frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \dots + \frac{M_kx + N_k}{(x^2 + px + q)^k}, \quad (5)$$

donde

$$x^2 + px + q = [x - (a + ib)][x - (a - ib)]$$

y $M_1, N_1, \dots, M_k, N_k$ son coeficientes indeterminados que se calculan por los procedimientos indicados más arriba. Cuando $k=1$, la fracción (5) se integra directamente; cuando $k>1$, se emplea el *procedimiento de reducción*, recomendándose que previamente se le dé al trinomio de segundo grado $x^2 + px + q$ la forma $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$ y se haga la sustitución $x + \frac{p}{2} = z$.

Ejemplo 3. Hallar

$$\int \frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2} dx = I.$$

Solución. Como

$$x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1,$$

poniendo $x+2=z$, tenemos:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{z-1}{(z^2+1)^2} dz = \int \frac{z dz}{(z^2+1)^2} - \int \frac{(1+z^2)-z^2}{(z^2+1)^2} dz = \\ &= -\frac{1}{2(z^2+1)} - \int \frac{dz}{z^2+1} + \int z d \left[-\frac{1}{2(z^2+1)} \right] = -\frac{1}{2(z^2+1)} - \\ &\quad - \operatorname{arctg} z - \frac{z}{2(z^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} z = -\frac{z+1}{2(z^2+1)} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} z + C = -\frac{x+3}{2(x^2+4x+5)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x+2) + C. \end{aligned}$$

2°. Método de Ostrogradski. Si $Q(x)$ tiene raíces múltiples, se tiene,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{X(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{Q_2(x)} dx, \quad (6)$$

donde $Q_1(x)$ es el máximo común divisor del polinomio $Q(x)$ y de su derivada $Q'(x)$;

$$Q_2(x) = Q(x) : Q_1(x);$$

$X(x)$ o $Y(x)$ son polinomios con coeficientes indeterminados, cuyos grados son menores en una unidad que los de $Q_1(x)$ y $Q_2(x)$, respectivamente.

Los coeficientes indeterminados de los polinomios $X(x)$ o $Y(x)$ se calculan derivando la identidad (6).

Ejemplo 4. Hallar

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}.$$

Solución.

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3-1} + \int \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1} dx.$$

Derivando esta identidad, tendremos:

$$\frac{1}{(x^3-1)^2} = \frac{(2Ax+B)(x^3-1) - 3x^2(Ax^2+Bx+C)}{(x^3-1)^2} + \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1}$$

o bien,

$$1 = (2Ax+B)(x^3-1) - 3x^2(Ax^2+Bx+C) + (Dx^2+Ex+F)(x^3-1).$$

Igualando los coeficientes de las correspondientes potencias de x , tendremos

$$\begin{aligned} D=0; \quad E-A=0; \quad F-2B=0; \quad D+3C=0; \quad E+2A=0; \\ B+F=-1; \end{aligned}$$

de donde

$$A=0; \quad B=-\frac{1}{3}; \quad C=0; \quad D=0; \quad E=0; \quad F=-\frac{2}{3}$$

y, por consiguiente,

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = -\frac{1}{3} \frac{x}{x^3-1} - \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x^3-1}. \quad (7)$$

Para calcular la integral del segundo miembro de la igualdad (7), descomponemos la fracción $\frac{1}{x^3-1}$ en fracciones elementales:

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{L}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1},$$

es decir,

$$1 = L(x^2+x+1) + Mx(x-1) + N(x-1). \quad (8)$$

Poniendo $x=1$, tendremos que $L = \frac{1}{3}$.

Igualando los coeficientes de las potencias iguales de x en ambos miembros de la igualdad (8), hallamos:

$$L+M=0; \quad L-N=1;$$

es decir,

$$M = -\frac{1}{3}; \quad N = -\frac{2}{3}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3-1} &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3} \int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx = \\ &= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

y

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = -\frac{x}{3(x^3-1)} + \frac{1}{9} \ln \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Hallar las integrales:

$$1280. \int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}.$$

$$1281. \int \frac{x^2-5x+9}{x^3-5x+6} dx.$$

$$1282. \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}.$$

$$1283. \int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx.$$

$$1284. \int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} dx.$$

$$1285. \int \frac{dx}{x(x+1)^2}.$$

$$1286. \int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx.$$

$$1287. \int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8} dx.$$

$$1288. \int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2} dx.$$

$$1289. \int \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2} dx.$$

$$1290. \int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^3} dx.$$

$$1291. \int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)} dx.$$

$$1292. \int \frac{x^4}{x^4-1} dx.$$

$$1293. \int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}.$$

$$1294. \int \frac{dx}{x^3+1}.$$

$$1295. \int \frac{dx}{x^4+1}.$$

1296. $\int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}.$

1297. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$

1298. $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2} dx.$

1299. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}.$

1300. $\int \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2} dx.$

Hallar las integrales siguientes, utilizando el método de Ostrogradski:

1301. $\int \frac{dx}{(x+1)^3(x^2+1)^2}.$

1303. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^4}.$

1302. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}.$

1304. $\int \frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2} dx.$

Hallar las integrales siguientes, empleando diversos procedimientos:

1305. $\int \frac{x^5}{(x^3+1)(x^3+8)} dx.$

1310*. $\int \frac{dx}{x(x^7+1)}.$

1306. $\int \frac{x^7+x^3}{x^{12}-2x^4+1} dx.$

1311. $\int \frac{dx}{x(x^5+1)^2}.$

1307. $\int \frac{x^2-x+14}{(x-4)^3(x-2)} dx.$

1312. $\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)}.$

1308. $\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}.$

1313. $\int \frac{x^2 dx}{(x-1)^{10}}.$

1309. $\int \frac{dx}{x^3-4x^2+5x-2}.$

1314. $\int \frac{dx}{x^8+x^6}.$

§ 6. Integración de algunas funciones irracionales

1º. Integrales del tipo

$$\int R \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots \right] dx, \quad (1)$$

donde R es una función racional y $p_1, q_1, p_2, q_2, \dots$ son números enteros.

Las integrales del tipo (1) se hallan valiéndose de la sustitución

$$\frac{ax+b}{cx+d} = z^n,$$

donde n es el mínimo común múltiplo de los números $q_1, q_2, \dots$

Ejemplo 1. Hallar

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}.$$

Solución. La sustitución $2x-1=z^4$ reduce la integral a la forma

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}} &= \int \frac{2z^3 dz}{z^2-z} = 2 \int \frac{z^2 dz}{z-1} = \\ &= 2 \int \left(z+1+\frac{1}{z-1} \right) dz = (z+1)^2 + 2 \ln |z-1| + C = \\ &= (1+\sqrt[4]{2x-1})^2 + \ln (\sqrt[4]{2x-1}-1)^2 + C.\end{aligned}$$

Hallar las integrales:

$$1315. \int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx.$$

$$1321. \int \frac{\sqrt{x}}{x+2} dx.$$

$$1316. \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{ax+b}}.$$

$$1322. \int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$$

$$1317. \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}.$$

$$1323. \int x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx.$$

$$1318. \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$$

$$1324. \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx.$$

$$1319. \int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x+1}} dx.$$

$$1325. \int \frac{x+3}{x^2 \sqrt{2x+3}} dx.$$

$$1320. \int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}} dx.$$

2°. Integrales del tipo

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx, \quad (2)$$

donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado n .

Se supone que

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = Q_{n-1}(x) \sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad (3)$$

donde $Q_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado $(n-1)$ con coeficientes indeterminados y λ es un número.

Los coeficientes del polinomio $Q_{n-1}(x)$ y el número λ se hallan derivando la identidad (3).

Ejemplo 2.

$$\begin{aligned}\int x^3 \sqrt{x^2+4} dx &= \int \frac{x^3+4x^3}{\sqrt{x^2+4}} dx = \\ &= (Ax^3+Bx^2+Cx+D) \sqrt{x^2+4} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}.\end{aligned}$$

De donde

$$\frac{x^3+4x^3}{\sqrt{x^2+4}} = (3Ax^2+2Bx+C) \sqrt{x^2+4} + \frac{(Ax^3+Bx^2+Cx+D)x}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Multiplicando por $\sqrt{x^2+4}$ e igualando los coeficientes de las potencias iguales de x , obtenemos:

$$A = \frac{1}{4}; B = 0; C = \frac{1}{2}; D = 0; \lambda = -2.$$

Por consiguiente,

$$\int x^2 \sqrt{x^2+4} dx = \frac{x^3+2x}{4} \sqrt{x^2+4} - 2 \ln(x + \sqrt{x^2+4}) + C.$$

3°. Integrales del tipo

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{ax^2+bx+c}}. \quad (4)$$

Se reducen al tipo de integrales (2) valiéndose de la sustitución

$$\frac{1}{x-\alpha} = t.$$

Hallar las integrales:

$$1326. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-x+1}}.$$

$$1329. \int \frac{dx}{x^6 \sqrt{x^2-1}}.$$

$$1327. \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$1330. \int \frac{dx}{(x+1)^3 \sqrt{x^2+2x}}.$$

$$1328. \int \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

$$1331. \int \frac{x^2+x+1}{x \sqrt{x^2-x+1}} dx.$$

4°. Integrales de las diferenciales binomias

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx, \quad (5)$$

donde m, n y p son números racionales.

Condiciones de Chébishev. La integral (5) puede expresarse por medio de una combinación finita de funciones elementales únicamente en los tres casos que siguen:

1) cuando p es número entero;

2) cuando $\frac{m+1}{n}$ es número entero. Aquí se emplea la sustitución $a+bx^n = x^s$, donde s es el divisor de la fracción p ;

3) cuando $\frac{m+1}{n} + p$ es número entero. En este caso se emplea la sustitución $ax^{-n} + b = x^s$.

Ejemplo 3. Hallar

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = I.$$

Solución. Aquí $m = \frac{1}{2}$; $n = \frac{1}{4}$; $p = \frac{1}{3}$; $\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2.$

Por consiguiente, tenemos el 2) caso de integrabilidad.

La sustitución

$$1+x^{\frac{1}{4}}=z^3$$

nos da: $x=(z^3-1)^4$; $dx=12z^2(z^3-1)^3 dz$. Por lo que

$$\begin{aligned} I &= \int x^{-\frac{1}{2}} \left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} dx = 12 \int \frac{z^3(z^3-1)^3}{(z^3-1)^2} dz = \\ &= 12 \int (z^6 - z^3) dz = \frac{12}{7} z^7 - 3z^4 + C, \end{aligned}$$

donde

$$z = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}.$$

Hallar las integrales:

$$1332. \int x^3 (1+2x^2)^{-\frac{3}{2}} dx.$$

$$1335. \int \frac{dx}{x \sqrt[5]{1+x^5}}.$$

$$1333. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$$

$$1336. \int \frac{dx}{x^2 (2+x^3)^{\frac{5}{3}}}.$$

$$1334. \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}}.$$

$$1337. \int \frac{dx}{\sqrt{x^3} \sqrt[3]{1+\sqrt{x^3}}}.$$

§ 7. Integración de funciones trigonométricas

1°. Integrales del tipo

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx = I_{m,n}, \quad (1)$$

donde m y n son números enteros.

1) Cuando $m=2k+1$ es un número impar y positivo, se supone

$$I_{m,n} = - \int \operatorname{sen}^{2k} x \cos^n x d(\cos x) = - \int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x d(\cos x).$$

De forma análoga se procede cuando n es un número impar positivo.

Ejemplo 1.

$$\int \operatorname{sen}^{10} x \cos^2 x dx = \int \operatorname{sen}^{10} x (1-\operatorname{sen}^2 x) d(\operatorname{sen} x) = \frac{\operatorname{sen}^{11} x}{11} - \frac{\operatorname{sen}^{13} x}{13} + C.$$

2) Cuando m y n son números pares y positivos, la expresión subintegral (1) se transforma valiéndose de las fórmulas:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x),$$

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x.$$

Ejemplo 2.

$$\begin{aligned}
 \int \cos^2 3x \operatorname{sen}^4 3x \, dx &= \int (\cos 3x \operatorname{sen} 3x)^2 \operatorname{sen}^2 3x \, dx = \\
 &= \int \frac{\operatorname{sen}^2 6x}{4} \frac{1 - \cos 6x}{2} \, dx = \frac{1}{8} \int (\operatorname{sen}^2 6x - \operatorname{sen}^2 6x \cos 6x) \, dx = \\
 &= \frac{1}{8} \int \left(\frac{1 - \cos 12x}{2} - \operatorname{sen}^2 6x \cos 6x \right) \, dx = \\
 &= \frac{1}{8} \left(\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 12x}{24} - \frac{1}{48} \operatorname{sen}^3 6x \right) + C.
 \end{aligned}$$

3) Cuando $m = -\mu$ y $n = -\nu$ son números enteros, negativos y pares del mismo orden, tenemos

$$\begin{aligned}
 I_{m,n} &= \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^\mu x \cos^\nu x} = \int \operatorname{cosec}^\mu x \sec^{\nu-2} x \, d(\operatorname{tg} x) = \\
 &= \int \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} \right)^{\frac{\mu}{2}} (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{\nu-2}{2}} \, d(\operatorname{tg} x) = \int \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{\mu+\nu-1}{2}}}{\operatorname{tg}^\mu x} \, d(\operatorname{tg} x).
 \end{aligned}$$

A este caso se reducen, en particular, las integrales

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^\mu x} = \frac{1}{2^{\mu-1}} \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{sen}^\mu \frac{x}{2} \cos^\mu \frac{x}{2}} \text{ y } \int \frac{dx}{\cos^\nu x} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}^\nu \left(x + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Ejemplo 3.

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \sec^2 x \, d(\operatorname{tg} x) = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \, d(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C.$$

Ejemplo 4.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x} &= \frac{1}{2^3} \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}} = \frac{1}{8} \int \operatorname{tg}^{-3} \frac{x}{2} \sec^6 \frac{x}{2} \, dx = \\
 &= \frac{1}{8} \int \frac{\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)^2}{\operatorname{tg}^3 \frac{x}{2}} \sec^2 \frac{x}{2} \, dx = \\
 &= \frac{2}{8} \int \left[\operatorname{tg}^{-3} \frac{x}{2} + \frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right] d\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) = \\
 &= \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + 2 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2} \right] + C.
 \end{aligned}$$

4) Las integrales de la forma $\int \operatorname{tg}^m x \, dx$ (o $\int \operatorname{ctg}^m x \, dx$), donde m es un número entero y positivo, se calculan valiéndose de la fórmula

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$$

(o de la correspondiente $\operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$).

Ejemplo 5.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^4 x \, dx &= \int \operatorname{tg}^2 x (\sec^2 x - 1) \, dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \\ &= \int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \int (\sec^2 x - 1) \, dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C. \end{aligned}$$

5) En el caso general, las integrales $I_{m,n}$ de la forma (1) se calculan por medio de fórmulas de reducción (fórmulas de recurrencia), que se deducen, ordinariamente, empleando la integración por partes.

Ejemplo 6.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos^3 x} &= \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^3 x} \, dx = \int \operatorname{sen} x \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x} \, dx + \int \frac{dx}{\cos x} = \\ &= \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2} \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} \, dx + \int \frac{dx}{\cos x} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} x + \sec x| + C. \end{aligned}$$

Hallar las integrales:

1338. $\int \cos^3 x \, dx.$

1339. $\int \operatorname{sen}^5 x \, dx.$

1340. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx.$

1341. $\int \operatorname{sen}^3 \frac{x}{2} \cos^5 \frac{x}{2} \, dx.$

1342. $\int \frac{\cos^5 x}{\operatorname{sen}^3 x} \, dx.$

1343. $\int \operatorname{sen}^4 x \, dx.$

1344. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx.$

1345. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx.$

1346. $\int \cos^6 3x \, dx.$

1347. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x}.$

1348. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}.$

1349. $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^6 x} \, dx.$

1350. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^4 x}.$

1351. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^5 x \cos^3 x}.$

1352. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}}.$

1353. $\frac{\operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}{\operatorname{sen} x \cos x} \, dx.$

1354. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^5 x}.$

1355. $\int \sec^5 4x \, dx.$

1360. $\int x \sin^2 x^2 \, dx.$

1356. $\int \operatorname{tg}^2 5x \, dx.$

1361. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} \, dx.$

1357. $\int \operatorname{ctg}^3 x \, dx.$

1362. $\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x} \, dx.$

1358. $\int \operatorname{ctg}^4 x \, dx.$

1363. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}.$

1359. $\int \left(\operatorname{tg}^3 \frac{x}{3} + \operatorname{tg}^4 \frac{x}{4} \right) dx.$

1364. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}.$

2°. Integrales de las formas: $\int \sin mx \cos nx \, dx,$

$$\int \sin mx \sin nx \, dx \text{ y } \int \cos mx \cos nx \, dx.$$

En estos casos se emplean las fórmulas:

1) $\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin (m+n)x + \sin (m-n)x];$

2) $\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos (m-n)x - \cos (m+n)x];$

3) $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos (m-n)x + \cos (m+n)x].$

Ejemplo 7.

$$\int \sin 9x \sin x \, dx = \int \frac{1}{2} [\cos 8x - \cos 10x] \, dx = \frac{1}{16} \sin 8x - \frac{1}{20} \sin 10x + C.$$

Hallar las integrales:

1365. $\int \sin 3x \cos 5x \, dx.$

1369. $\int \cos(ax+b) \cos(ax-b) \, dx.$

1366. $\int \sin 10x \sin 15x \, dx.$

1370. $\int \sin \omega t \sin (\omega t + \varphi) \, dt.$

1367. $\int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} \, dx.$

1371. $\int \cos x \cos^2 3x \, dx.$

1368. $\int \sin \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3} \, dx.$

1372. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x \, dx.$

3°. Integrales de la forma

$$\int R(\sin x, \cos x) \, dx, \quad (2)$$

donde R es una función racional.

1) Valiéndose de la sustitución

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t,$$

de donde

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

las integrales de la forma (2) se reducen a integrales de funciones racionales de la nueva variable t .

Ejemplo 8. Hallar

$$\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x + \cos x} = I.$$

Solución. Suponiendo $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, tendremos:

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln |1+t| + C = \ln \left| 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

2) Si se verifica la identidad

$$R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) \equiv R(\operatorname{sen} x, \cos x),$$

para reducir la integral (2) a la forma racional se puede emplear la sustitución $\operatorname{tg} x = t$.

En este caso,

$$\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

y

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Ejemplo 9. Hallar

$$\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen}^2 x} = I \quad (3)$$

Solución. Poniendo

$$\operatorname{tg} x = t, \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

tendremos:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dt}{(1+t)^2 \left(1 + \frac{t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{1+2t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(t\sqrt{2})}{1+(t\sqrt{2})^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(t\sqrt{2}) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C. \end{aligned}$$

Debe advertirse que la integral (3) se calcula más de prisa si el numerador y el denominador de la fracción se dividen previamente por $\cos^2 x$.

En algunos casos concretos es conveniente el empleo de procedimientos artificiales (véase el ejemplo N° 1379).

Hallar las integrales:

$$1373. \int \frac{dx}{3 + 5 \cos x}.$$

$$1375. \int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx.$$

$$1374. \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x}.$$

$$1376. \int \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} dx.$$

$$1377. \int \frac{dx}{8-4 \operatorname{sen} x+7 \cos x}.$$

$$1384^*. \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x-5 \operatorname{sen} x \cos x}.$$

$$1378. \int \frac{dx}{\cos x+2 \operatorname{sen} x+3}.$$

$$1385. \int \frac{\operatorname{sen} x}{(1-\cos x)^3} dx.$$

$$1379^{**}. \int \frac{3 \operatorname{sen} x+2 \cos x}{2 \operatorname{sen} x+3 \cos x} dx.$$

$$1386. \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\operatorname{sen}^2 x} dx.$$

$$1380. \int \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} dx.$$

$$1387. \int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x+\operatorname{sen}^4 x} dx.$$

$$1381^*. \int \frac{dx}{1+3 \cos^2 x}.$$

$$1388. \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x-6 \operatorname{sen} x+5} dx.$$

$$1382^*. \int \frac{dx}{3 \operatorname{sen}^2 x+5 \cos^2 x}.$$

$$1389^*. \int \frac{dx}{(2-\operatorname{sen} x)(3-\operatorname{sen} x)}.$$

$$1383^*. \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x+3 \operatorname{sen} x \cos x-\cos^2 x}.$$

$$1390^*. \int \frac{1-\operatorname{sen} x+\cos x}{1+\operatorname{sen} x-\cos x} dx.$$

§ 8. Integración de funciones hiperbólicas

La integración de las funciones hiperbólicas es completamente análoga a la integración de las funciones trigonométricas.

Deben recordarse las siguientes fórmulas principales:

$$1) \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;$$

$$2) \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2x - 1);$$

$$3) \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2x + 1);$$

$$4) \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2x.$$

Ejemplo 1. Hallar

$$\int \operatorname{ch}^2 x dx.$$

Solución. Tenemos:

$$\int \operatorname{ch}^2 x dx = \int \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2x + 1) dx = \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + \frac{1}{2} x + C.$$

Ejemplo 2. Hallar

$$\int \operatorname{ch}^3 x dx.$$

Solución. Tenemos:

$$\int \operatorname{ch}^3 x dx = \int \operatorname{ch}^2 x d(\operatorname{sh} x) = \int (1 + \operatorname{sh}^2 x) d(\operatorname{sh} x) = \operatorname{sh} x + \frac{\operatorname{sh}^3 x}{3} + C.$$

Hallar las integrales:

$$1391. \int \operatorname{sh}^3 x \, dx.$$

$$1397. \int \operatorname{th}^3 x \, dx.$$

$$1392. \int \operatorname{ch}^4 x \, dx.$$

$$1398. \int \operatorname{cth}^4 x \, dx.$$

$$1393. \int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch} x \, dx.$$

$$1399. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x}.$$

$$1394. \int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x \, dx.$$

$$1400. \int \frac{dx}{2 \operatorname{sh} x + 3 \operatorname{ch} x}.$$

$$1395. \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^2 x}.$$

$$1401. \int \frac{dx}{\operatorname{th} x - 1}.$$

$$1396. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x}.$$

$$1402. \int \frac{\operatorname{sh} x \, dx}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}.$$

§ 9. Empleo de sustituciones trigonométricas e hiperbólicas para el cálculo de integrales de la forma

$$R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) \, dx, \quad (1)$$

donde R es una función racional.

Transformando el trinomio de segundo grado $ax^2 + bx + c$ en una suma o resta de cuadrados, reducimos la integral (1) a una de las integrales de las formas siguientes:

$$1) \int R(z, \sqrt{m^2 - z^2}) \, dz;$$

$$2) \int R(z, \sqrt{m^2 + z^2}) \, dz;$$

$$3) \int R(z, \sqrt{z^2 - m^2}) \, dz.$$

Estas últimas integrales se resuelven valiéndose, respectivamente, de las sustituciones:

$$1) z = m \operatorname{sen} t \text{ o } z = m \operatorname{th} t,$$

$$2) z = m \operatorname{tg} t \text{ o } z = m \operatorname{sh} t,$$

$$3) z = m \operatorname{sec} t \text{ o } z = m \operatorname{ch} t.$$

Ejemplo 1. Hallar

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{x^2 + 2x + 2}} = I.$$

Solución. Tenemos:

$$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1.$$

Pongamos $x+1 = \operatorname{tg} t$, en cuyo caso $dx = \sec^2 t \, dt$ y

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{(x+1)^2 + 1}} = \int \frac{\sec^2 t \, dt}{\operatorname{tg}^2 t \sec t} = \int \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t} \, dt = \\ &= -\frac{1}{\operatorname{sen} t} + C = -\frac{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}{x+1} + C. \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Hallar

$$\int x \sqrt{x^2 + x + 1} dx = I.$$

Solución. Tenemos:

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Poniendo

$$x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sh} t \text{ y } dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ch} t dt,$$

obtendremos:

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sh} t - \frac{1}{2} \right) \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ch} t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ch} t dt = \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{8} \int \operatorname{sh} t \operatorname{ch}^3 t dt - \frac{3}{8} \int \operatorname{ch}^3 t dt = \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{\operatorname{ch}^3 t}{3} - \frac{3}{8} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t + \frac{1}{2} t \right) + C. \end{aligned}$$

Como

$$\operatorname{sh} t = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2}\right), \quad \operatorname{ch} t = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{x^2 + x + 1}$$

y

$$t = \ln \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1} \right) + \ln \frac{2}{\sqrt{3}},$$

definitivamente, tendremos:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} (x^2 + x + 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} \left(x + \frac{1}{2}\right) \sqrt{x^2 + x + 1} - \\ &\quad - \frac{3}{16} \ln \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1} \right) + C. \end{aligned}$$

Hallar las integrales:

1403. $\int \sqrt{3 - 2x - x^2} dx.$

1409. $\int \sqrt{x^2 - 6x - 7} dx.$

1404. $\int \sqrt{2 + x^2} dx.$

1410. $\int (x^2 + x + 1)^{\frac{3}{2}} dx.$

1405. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9 + x^2}} dx.$

1411. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 - 3x + 2}}.$

1406. $\int \sqrt{x^2 - 2x + 2} dx.$

1412. $\int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 5)^{\frac{3}{2}}}.$

1407. $\int \sqrt{x^2 - 4} dx.$

1413. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}.$

1408. $\int \sqrt{x^2 + x} dx.$

1414. $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}.$

§ 10. Integración de diversas funciones trascendentes

Hallar las integrales:

1415. $\int (x^2 + 1)^2 e^{2x} dx.$

1421. $\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2}.$

1416. $\int x^2 \cos^3 3x dx.$

1422. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}}.$

1417. $\int x \sin x \cos 2x dx.$

1423. $\int x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$

1418. $\int e^{2x} \sin^3 x dx.$

1424. $\int \ln^2 (x + \sqrt{1+x^2}) dx.$

1419. $\int e^x \sin x \sin 3x dx.$

1425. $\int x \arccos (5x-2) dx.$

1420. $\int x e^x \cos x dx.$

1426. $\int \sin x \operatorname{sh} x dx.$

§ 11. Empleo de las fórmulas de reducción

1427. $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$; hallar I_2 e I_3 .

1428. $I_n = \int \sin^n x dx$; hallar I_4 e I_5 .

1429. $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$; hallar I_3 e I_4 .

1430. $I_n = \int x^n e^{-x} dx$; hallar I_{10} .

§ 12. Integración de distintas funciones

1431. $\int \frac{dx}{2x^2 - 4x + 9}.$

1437. $\int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2}.$

1432. $\int \frac{x-5}{x^2-2x+2} dx.$

1438. $\int \frac{dx}{x^4 - 2x^2 + 1}.$

1433. $\int \frac{x^3}{x^3 + x + \frac{1}{2}} dx.$

1439. $\int \frac{x dx}{(x^2 - x + 1)^3}.$

1434. $\int \frac{dx}{x(x^2 + 5)}.$

1440. $\int \frac{3-4x}{(1-2\sqrt{x})^2} dx.$

1435. $\int \frac{dx}{(x+2)^2 (x+3)^2}.$

1441. $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x^3} dx.$

1436. $\int \frac{dx}{(x+1)^2 (x^2+1)}.$

1442. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$

$$1443. \int \frac{1 - \sqrt[3]{2x}}{\sqrt[3]{2x}} dx.$$

$$1444. \int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x})^2}.$$

$$1445. \int \frac{2x+1}{\sqrt{(4x^2-2x+1)^3}} dx.$$

$$1446. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x} + \sqrt{5-x}}.$$

$$1447. \int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}} dx.$$

$$1448. \int \frac{x dx}{(1+x^2) \sqrt{1-x^4}}.$$

$$1449. \int \frac{x dx}{\sqrt{1-2x^2-x^4}}.$$

$$1450. \int \frac{x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

$$1451^*. \int \frac{dx}{(x^2+4x) \sqrt{4-x^2}}.$$

$$1452. \int \sqrt{x^2-9} dx.$$

$$1453. \int \sqrt{x-4x^2} dx.$$

$$1454. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2+x+1}}.$$

$$1455. \int x \sqrt{x^2+2x+2} dx.$$

$$1456. \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2-1}}.$$

$$1457. \int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^3}}.$$

$$1458. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$$

$$1459. \int \frac{5x}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx.$$

$$1460. \int \cos^4 x dx.$$

$$1461. \int \frac{dx}{\cos x \operatorname{sen}^5 x}.$$

$$1462. \int \frac{1 + \sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\operatorname{sen}^2 x} dx.$$

$$1463. \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt[3]{\cos^3 x}} dx.$$

$$1464. \int \operatorname{cosec}^5 5x dx.$$

$$1465. \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^6 x} dx.$$

$$1466. \int \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \times \\ \times \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + x \right) dx.$$

$$1467. \int \operatorname{tg}^3 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) dx.$$

$$1468. \int \frac{dx}{2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x - 5}.$$

$$1469. \int \frac{dx}{2 + 3 \cos^2 x}.$$

$$1470. \int \frac{dx}{\cos^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x + \\ + 2 \operatorname{sen}^2 x}$$

$$1471. \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x}.$$

$$1472. \int \frac{dx}{(2 + \cos x)(3 + \cos x)}.$$

$$1473. \int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x + 1}} dx.$$

$$1474. \int \frac{\cos ax}{\sqrt{a^2 + \operatorname{sen}^2 ax}} dx.$$

$$1475. \int \frac{x dx}{\cos^2 3x}.$$

$$1476. \int x \operatorname{sen}^2 x dx.$$

$$1477. \int x^2 e^{x^3} dx.$$

$$1478. \int x e^{2x} dx.$$

1479. $\int x^2 \ln \sqrt{1-x} dx.$
 1480. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$
 1481. $\int \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} dx.$
 1482. $\int \frac{dx}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}.$
 1483. $\int \frac{dx}{(\operatorname{tg} x + 1) \operatorname{sen}^2 x}.$
 1484. $\int \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x dx.$
 1485. $\int \frac{\operatorname{sh} \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} dx.$
 1486. $\int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x} dx.$
 1487. $\int \frac{x}{\operatorname{sh}^2 x} dx.$
 1488. $\int \frac{dx}{e^{2x} - 2e^x}.$
 1489. $\int \frac{e^x}{e^{2x} - 6e^x + 13} dx.$
 1490. $\int \frac{e^{2x}}{(e^x + 1)^{\frac{1}{4}}} dx.$
 1491. $\int \frac{2^x}{1-4^x} dx.$
 1492. $\int (x^2 - 1) 10^{-2x} dx.$
 1493. $\int \sqrt{e^x + 1} dx.$
 1494. $\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx.$
 1495. $\int x^3 \operatorname{arcsen} \frac{1}{x} dx.$
 1496. $\int \cos (\ln x) dx.$
 1497. $\int (x^2 - 3x) \operatorname{sen} 5x dx.$
 1498. $\int x \operatorname{arctg} (2x + 3) dx.$
 1499. $\int \operatorname{arcsen} \sqrt{x} dx.$
 1500. $\int |x| dx.$