

21–28 □ Con los teoremas 4, 5, 7 y 9 explique por qué la función es continua en todo número en su dominio. Dé el dominio.

21. $F(x) = \frac{x}{x^2 + 5x + 6}$

22. $f(t) = 2t + \sqrt{25 - t^2}$

23. $h(x) = \sqrt[3]{x-1}(x^2 - 2)$


24. $h(x) = \frac{\sin x}{x+1}$

25. $f(x) = e^x \sin 5x$

26. $F(x) = \sin^{-1}(x^2 - 1)$

27. $G(t) = \ln(t^4 - 1)$

28. $H(x) = \cos(e^{\sqrt{x}})$

 **29–30** □ Localice las discontinuidades de la función e ilústrelas trazando una gráfica.

29. $y = \frac{1}{1 + e^{1/x}}$

30. $y = \ln(\tan^2 x)$

31–34 □ Aplique la continuidad para evaluar el límite.

31. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5 + \sqrt{x}}{\sqrt{5 + x}}$

32. $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin(x + \sin x)$

33. $\lim_{x \rightarrow 1} e^{x^2 - x}$

34. $\lim_{x \rightarrow 2} \arctan\left(\frac{x^2 - 4}{3x^2 - 6x}\right)$

35. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{para } x < 3 \\ 5 - x & \text{para } x \geq 3 \end{cases}$$

Mostrar que f es continua en $(-\infty, \infty)$

36–37 □ Encuentre los números en que la función es discontinua. ¿En cuáles de estos puntos f es continua desde la derecha, desde la izquierda o desde ninguno de los dos lados? Trace la gráfica de f .

36. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ 3x & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

37. $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{si } x < 0 \\ (x+1)^3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

38. La fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre una masa unitaria a una distancia r del centro del planeta es

$$F(r) = \begin{cases} \frac{GM}{R^3} & \text{si } r < R \\ \frac{GM}{r^2} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

donde M es la masa de la Tierra, R su radio y G es la constante gravitacional. ¿ F es una función continua de r ?

39. ¿Para qué valor de la constante c la función f es continua sobre $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} cx + 1 & \text{si } x \leq 3 \\ cx^2 - 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

40. Hallar la constante c para la cual la función g es continua en todos los valores reales.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - c^2 & \text{si } x < 4 \\ cx + 20 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

41. ¿Cuál de las funciones siguientes tiene una discontinuidad removible en a ? Si es removible, hallar una función g que coincida con f para $x \neq a$ y que sea continua en toda la recta real \mathbb{R} .

(a) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x + 2}$, $a = -2$

(b) $f(x) = \frac{x - 7}{|x - 7|}$, $a = 7$

(c) $f(x) = \frac{x^3 + 64}{x + 4}$, $a = -4$

(d) $f(x) = \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$, $a = 9$

42. Suponga que una función f es continua sobre $[0, 1]$, excepto en 0.25, y que $f(0) = 1$ y $f(1) = 3$. Sea $N = 2$. Trace dos gráficas posibles de f , una en que se muestre que f podría no satisfacer la conclusión del teorema del valor intermedio y la otra que muestre que f todavía podría satisfacer ese teorema (aun cuando no satisfaga la hipótesis).

43. Si $f(x) = x^3 - x^2 + x$, demuestre que existe un número c tal que $f(c) = 10$.

44. Aplique el teorema del valor intermedio para probar que existe un número positivo c tal que $c^2 = 2$. (Con esto se prueba la existencia del número $\sqrt{2}$.)

45–48 □ Aplique el teorema del valor intermedio para demostrar que existe una raíz de la ecuación dada en el intervalo especificado.

45. $x^3 - 3x + 1 = 0$, $(0, 1)$

46. $x^2 = \sqrt{x + 1}$, $(1, 2)$


47. $\cos x = x$, $(0, 1)$

48. $\ln x = e^{-x}$, $(1, 2)$

49–50 □ (a) Pruebe que la ecuación tiene por lo menos una raíz real. b) Use su calculadora para hallar un intervalo de longitud 0.01 que contenga una raíz.

49. $e^x = 2 - x$

50. $x^5 - x^2 + 2x + 3 = 0$

 **51–52** □ a) Pruebe que la ecuación tiene por lo menos una raíz real. b) Use su aparato graficador para hallar la raíz correcta hasta tres cifras decimales.

51. $x^5 - x^2 - 4 = 0$

52. $\sqrt{x - 5} = \frac{1}{x + 3}$

53. Demuestre que f es continua en a si y solo si

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a)$$

54. Para probar que seno es continuo, necesitamos demostrar que $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$, para todo número real a . Con el ejercicio 53