INTEGRACIÓN NUMÉRICA

En los cursos de Análisis Matemático (Cálculo Integral), nos enseñan como calcular una integral definida de una función continua mediante la aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo:

Teorema Fundamental del Cálculo

Sea $f(x)$ una función continua y definida en el intervalo $[a,b]$ y sea $F(x)$ una función primitiva de $f(x)$, entonces:

$$I = \int_a^b f(x)\ dx\ = F(b) - F(a)$$

El problema en la práctica se presenta cuando nos vemos imposibilitados de encontrar la función primitiva requerida, aún para integrales aparentemente sencillas como:

$$I = \int_0^1 e^{x^2}\, dx$$

la cual simplemente es imposible de resolver con el Teorema Fundamental del Cálculo.

En este capítulo estudiaremos diversos métodos numéricos que nos permitirán obtener aproximaciones bastante precisas a integrales como la mencionada anteriormente. Esencialmente, veremos dos tipos de integración numérica: las fórmulas de Newton-Cotes y el algoritmo de Romberg.

Las fórmulas de Newton-Cotes a desarrollar son las tres primeras, constituidas por las reglas del trapecio y de Simpson (regla de un tercio y de tres octavos). El algoritmo de Romberg forma parte de una técnica conocida como método de extrapolación de Richardson.

Haciendo uso de algunos programas computacionales matemáticos (por ejemplo Scilab) es posible discernir sobre las cualidades y defectos de cada uno de los métodos mencionados arriba.

FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN DE NEWTON-COTES

Estas fórmulas se basan en la idea de integrar una función polinomial en vez de $f(x)$:

$$I = \int_a^b f(x)\ dx\ \approx\ \int_a^b P_n\,(x) dx$$

donde $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots . + a_n x^n$ es un polinomio de aproximación de grado n para ciertos valores de $f(x)$ que se escogen apropiadamente (se suele conocer también como polinomio de interpolación, ya que la condición es que tome los mismos valores que la función original en los puntos elegidos). Estas fórmulas se pueden aplicar también a una tabla de datos, siendo éstos los puntos a considerar.

Dentro de las fórmulas de Newton-Cotes, existen las formas *cerradas* y *abiertas*. En las formas cerradas se conocen los valores de $f(a)$ y $f(b)$, en caso contrario, se llaman formas abiertas.

Nos remitiremos a estudiar únicamente las formas cerradas, y por lo tanto, siempre supondremos que conocemos los valores de los extremos, $f(a)$ y $f(b)$.

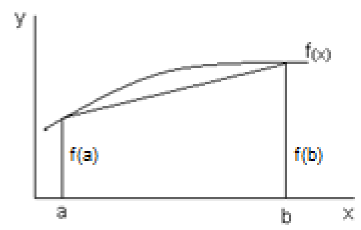
REGLA DEL TRAPECIO

Corresponde al caso donde $n = 1$, es decir:

$$I = \int_a^b f(x)\ dx \ \approx \ \int_a^b P_1\,(x)dx$$

donde $P_1(x)$ es un polinomio de de grado 1.

En el gráfico trazamos la recta que une los puntos: (a, f(a)) y (b, f(b)) obteniendo un trapecio cuya superficie será, aproximadamente, el valor de la integral I.

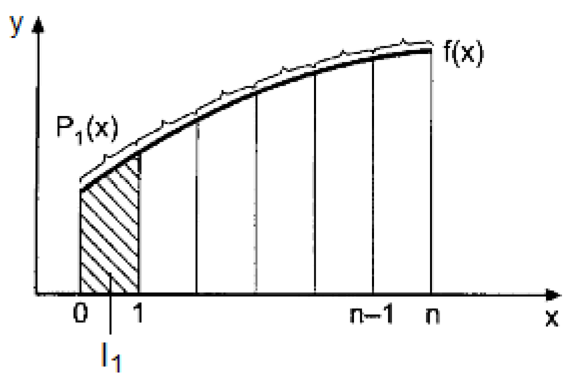


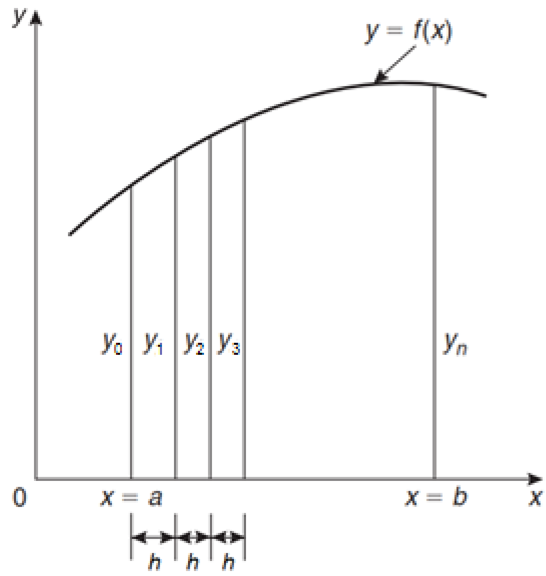
Así tendremos:

$$I = \int_a^b f(x)\ dx \ \approx \ \int_a^b P_1\,(x)dx = \int_a^b (a_0 + a_1\,x)\ dx = (b-a)\ \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

conocida como *Regla del Trapecio*.

Es de apreciar que el error que se llega a cometer con esta forma de aplicación puede ser significativo. Una mejor aproximación se obtiene dividiendo el intervalo de integración en subintervalos y aplicando en cada uno de ellos la regla trapecial. A este procedimiento se lo conoce como Regla Trapecial Compuesta.





Este nombre se debe a la interpretación geométrica que le podemos dar a la fórmula. El polinomio de interpolación para una tabla que contiene dos datos, es una línea recta. La integral, corresponde al área bajo la línea recta en el intervalo $[a,b]$, que es precisamente el área del trapecio que se forma.

Ejemplo 1:

Utilizar la regla del trapecio para aproximar la integral:

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx$$

Solución

Usamos la fórmula directamente con los siguientes datos:

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 1 \\ f(x) &= e^{x^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que:

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \approx (1-0)\left[\frac{f(0)+f(1)}{2}\right] = \frac{1+e}{2} = 1.85914$$

Ejemplo 2:

Usar la regla del trapecio para aproximar la integral:

$$\int_2^4 \frac{e^x}{x}dx$$

Solución

Igual que en el ejemplo anterior, sustituimos los datos de manera directa en la fórmula del trapecio. En este caso, tenemos los datos:

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ b &= 4 \\ f(x) &= \frac{e^x}{x} \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\int_2^4 \frac{e^x}{x}dx \approx (4-2)\left[\frac{f(2)+f(4)}{2}\right] = \frac{e^2}{2}+\frac{e^4}{4} = 17.3441$$

La regla del trapecio se puede ampliar si subdividimos el intervalo $[a,b]$ en n subintervalos, todos de la misma longitud $h=\frac{b-a}{n}$.

Sea $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ la partición que se forma al hacer dicha subdivisión. Usando propiedades de la integral tenemos que:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

Aplicando la regla del trapecio en cada una de las integrales, obtenemos:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (x_1-x_0)\left[\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\right]+\cdots+(x_n-x_{n-1})\left[\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right]$$

Ahora bien, ya que todos los subintervalos tienen la misma longitud *h*, tenemos que:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots 2f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

Sustituyendo el valor de *h* y usando la notación sigma, tenemos finalmente:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\left[\frac{f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(x_n)}{2n}\right]$$

Esta es la regla del trapecio para *n* subintervalos. Cuantos más subintervalos se usen, mejor será la aproximación a la integral, hasta que la importancia de los errores por redondeo comiencen a tomar relevancia.

__Ejemplo 1__:

Aplicar la regla del trapecio para aproximar la integral

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

si subdividimos en 5 intervalos.

Solución

En este caso, identificamos $n = 5$, y la partición generada es:

$$P = \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$$

Así, aplicando la fórmula tenemos que:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx (1-0)\left[\frac{f(0)+2(f(0.2)+f(0.4)+f(0.6)+f(0.8))+f(1)}{2(5)}\right]$$

$$= 1\left[\frac{1+2(e^{(0.2))^2}+e^{(0.4)^2}+e^{(0.6)^2}+e^{(0.8)^2})+e}{10}\right]$$

= 1.48065

Cabe mencionar que el valor verdadero de esta integral es de 1.4626…

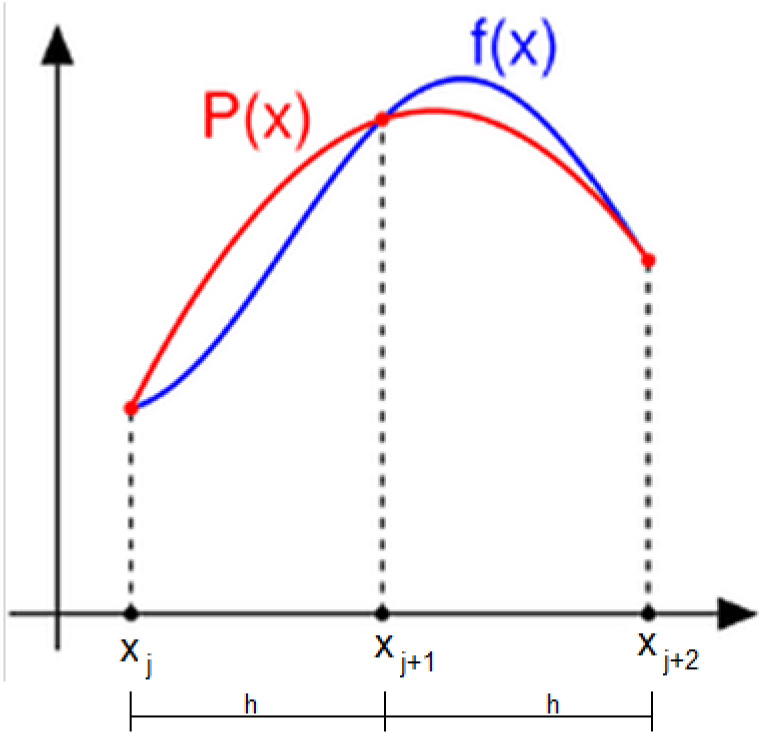
Así, vemos que con 5 intervalos, la aproximación no es tan mala. Para hacer cálculos con más subintervalos, es conveniente elaborar un programa que aplique la fórmula con el número de subintervalos que uno desee. El lector debería hacer su propio programa y checar con 50, 500, 1000, 10000 y 20000 subintervalos, para observar el comportamiento de la aproximación.

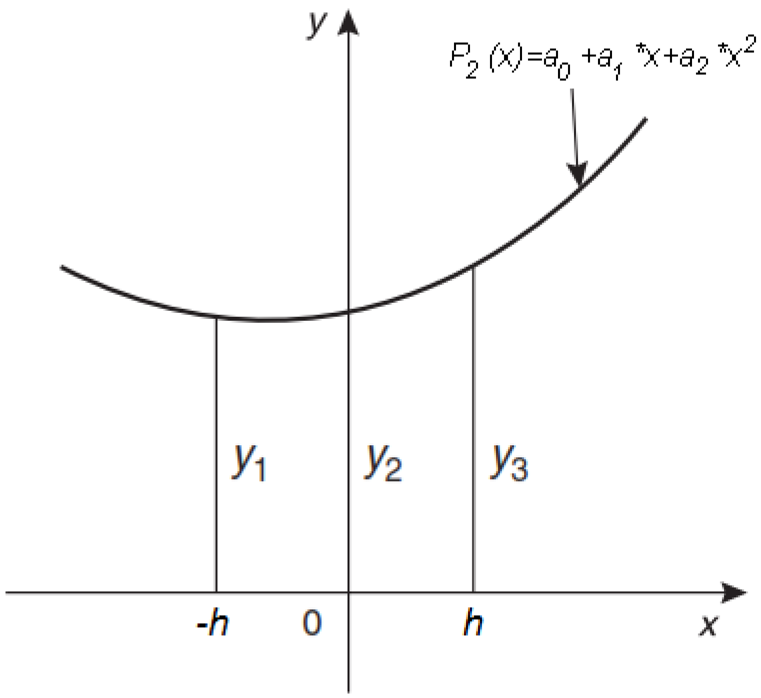
REGLA DE SIMPSON DE UN TERCIO

Suponemos que tenemos los datos:

a	x_m	b
$f(a)$	$f(x_m)$	$f(b)$

donde x_m es el punto medio entre a y b.





El polinomio $P_2(x) = a_0 + a_1 * x + a_2 * x^2$ (Polinomio de grado 2 en x) aproxima a la función pasando por los puntos *(-h, y_1), (0,y_2), (h,y_3)*

$$A = \int_{-h}^{h} P_2(x)dx \ = \int_{-h}^{h} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)dx = \left[a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3}\right]_{h}^{-h}$$

$$A = a_0 2h + a_2 2\frac{h^3}{3}$$

Analizando el polinomio y la función en los distintos puntos:

$x = 0 \Rightarrow f(0) = y_1 \Rightarrow P_2(0) = a_0 \therefore$ $\boxed{a_0 = y_1}$

$x = h \Rightarrow f(h) = y_2 \Rightarrow P_2(h) = a_0 + a_1 \cdot h + a_2 \cdot h^2$ ①

$x = -h \Rightarrow f(-h) = y_0 \Rightarrow P_2(-h) = a_0 - a_1 \cdot h + a_2 \cdot h^2$ ②

Sumamos ① y ②: $y_0 + y_2 = 2\ a_0 + 2\ a_2 \cdot h^2$

$y_0 + y_2 = 2\ y_1 + 2\ a_2 \cdot h^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_2 = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2h^2}}$

Reemplazando:

$A = 2y_1\ h + (y_0 - 2y_1 + y_2)\ h / 3$

$A = h/3\ (6y_1 + y_0 - 2y_1 + y_2)$

$\boxed{A = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)}$ Área de la parábola (polinomio de grado 2) que pasa por y_0, y_1 e y_2

Si tomamos "n" particiones del intervalo (con ***n*** par), tenemos:

$h = (b-a)/n$ (tamaño de los subintervalos)

$A = A_1 + A_2 + \text{---} + A_{n/2}$ (n/2 parábolas se subtienden)

$A = h/3\ (y_0 + 4y_1 + y_2) + h/3\ (y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + h/3\ (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$

$A = h/3\ (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$

Si llamamos:

Extremos: $E = y_0 + y_n$

Pares: $P = y_2 + y_4 + y_6 + \text{---} + y_{n-2}$

Impares: $I = y_1 + y_3 + y_5 + \text{---} + y_{n-1}$

$A = h\ (E + 4I + 2P)/3 \approx \int_a^b f(x)dx$

Error de Truncamiento: $\boxed{e_T \approx \dfrac{-h^4}{180} (b - a) \cdot f^{IV}(\varepsilon)}$

Ejemplo 1.

Usar la regla de Simpson de 1/3 para aproximar la siguiente integral:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

Solución.

Aplicamos la fórmula directamente, con los siguientes datos:

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 1 \\ x_m &= 0.5 \\ f(x) &= e^{x^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx (1-0)\left[\frac{f(0)+4f(0.5)+f(1)}{6}\right] = \frac{1+4e^{(0.5)^2}+e}{6} = 1.4757$$

Ejemplo 2.

Usar la regla de Simpson de 1/3, para aproximar la siguiente integral:

$$\int_2^4 \frac{e^x}{x} dx$$

Solución.

Igual que en el ejercicio anterior, sustituimos datos adecuadamente:

$$\int_2^4 \frac{e^x}{x} dx \approx (4-2)\left[\frac{f(2)+4f(3)+f(4)}{6}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{e^2}{2}+4\frac{e^3}{3}+\frac{e^4}{4}\right] = 14.7082$$

Al igual que con la regla del trapecio, podemos extender la regla de Simpson de 1/3, si subdividimos el intervalo $[a,b]$ en n subintervalos de la misma longitud $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ la partición que se forma al hacer la subdivisión, y denotemos por $x_{M_i} \in [x_{i-1}, x_i]$ el punto medio en cada subintervalo.

Aplicamos primero propiedades básicas de la integral definida:

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

Ahora, aplicamos la regla de Simpson de 1/3, en cada una de las integrales de arriba:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (x_1 - x_0)\left[\frac{f(x_0) + 4f(x_{M_1}) + f(x_1)}{6}\right] + \cdots + (x_n - x_{n-1})\left[\frac{f(x_{n-1}) + 4f(x_{M_n}) + f(x_n)}{6}\right]$$

Sustituimos $h = \frac{b-a}{n}$ y usamos la notación sigma:

$$\therefore \int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\left[\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{mi}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{6n}\right]$$

Ejemplo 1.

Aproximar la siguiente integral, aplicando la regla de Simpson de $\frac{1}{3}$ y subdividiendo en 5 intervalos.

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

Solución.

En este caso, tenemos que $n = 5$, y la partición que se genera es:

$$P = \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$$

Además, los puntos medios de cada subintervalo son:

$$P_M = \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$$

Por lo tanto, sustituimos los datos en la fórmula para obtener:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx (1-0)\left[\frac{f(0) + 4[f(0.1) + f(0.3) + \cdots + f(0.9)] + 2[f(0.2) + f(0.4) + \cdots + f(0.8)] + f(1)}{6(5)}\right]$$

$$= \frac{1}{30}\left[1 + 4\left[e^{(0.1)^2} + e^{(0.3)^2} + \cdots + e^{(0.9)^2}\right] + 2\left[e^{(0.2)^2} + e^{(0.4)^2} + e^{(0.6)^2} + e^{(0.8)^2}\right] + e\right] = 1.4626$$

Nótese que esta aproximación ya es exacta hasta el cuarto decimal!

<u>Ejemplo 2</u>.

Aproximar la siguiente integral, utilizando la regla de Simpson de $\frac{1}{3}$ y subdividiendo en 4 intervalos.

$$\int_2^4 \frac{e^x}{x}dx$$

***Solución*.**

En este caso, tenemos que $n = 4$, y la partición que se genera es:

$$P = \{2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$$

Además, los puntos medios de cada subintervalo son:

$$P_M = \{2.25, 2.75, 3.25, 3.75\}$$

Sustituyendo todos estos datos en la fórmula obtenemos la siguiente aproximación:

$$\int_2^4 \frac{e^x}{x}dx \approx (4-2)\left[\frac{f(2)+4\left[f(2.25)+f(2.75)+f(3.25)+f(3.75)\right]+2\left[f(2.5)+f(3)+f(3.5)\right]+f(4)}{6(4)}\right]$$

$$= \frac{1}{12}\left[\frac{e^2}{2}+4\left[\frac{e^{2.25}}{2.25}+\frac{e^{2.75}}{2.75}+\frac{e^{3.25}}{3.25}+\frac{e^{3.75}}{3.75}\right]+2\left[\frac{e^{2.5}}{2.5}+\frac{e^3}{3}+\frac{e^{3.5}}{3.5}\right]+\frac{e^4}{4}\right] = 14.6767$$

MÉTODO DE INTEGRACIÓN DE ROMBERG

Sea $I(h)$ el valor de la integral que aproxima a $I = \int_a^b f(x)dx$, mediante una partición de subintervalos de longitud $h = \dfrac{b-a}{n}$, usando la regla del trapecio. Entonces,

$$I = I(h) + E(h)$$

donde $E(h)$ es el error de truncamiento que se comete al aplicar la regla trapecial.

El *método de extrapolación de Richardson* combina dos aproximaciones de integración numérica, para obtener un tercer valor más exacto.

El algoritmo más eficiente dentro de éste método, se llama *Integración de Romberg,* la cual es una fórmula recursiva.

Supongamos que tenemos dos aproximaciones: $I(h_1)$ e $I(h_2)$, con subintervalos h_1 y h_2 respectivamente.

$$\therefore \left.\begin{array}{l} I = I(h_1) + E(h_1) \\ I = I(h_2) + E(h_2) \end{array}\right\} \Rightarrow I(h_1) + E(h_1) = I(h_2) + E(h_2)$$

Se ha visto que el error que se comete con la regla del trapecio para *n* subintervalos está dado por las siguientes fórmulas:

$$E(h_1) \approx -\frac{(b-a)}{12}\ h_1^2\, f''(\varepsilon)$$

$$E(h_2) \approx -\frac{(b-a)}{12}\ h_2^2\, f''(\varepsilon)$$

donde $f''(\varepsilon)$ es un promedio de la doble derivada entre ciertos valores que pertenecen a cada uno de los subintervalos.

Ahora bien, si suponemos que el valor de f'' es constante, entonces:

$$\frac{E(h_1)}{E(h_2)} \approx \frac{\dfrac{-(b-a)}{12} h_1^2 \overline{f''}}{\dfrac{-(b-a)}{12} h_2^2 \overline{f''}} \approx \frac{h_1^2}{h_2^2}$$

$$\therefore\ E(h_1) \approx E(h_2)\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2$$

Sustituyendo esto último en nuestra primera igualdad, tenemos que:

$$I(h_1) + E(h_2)\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 \approx I(h_2) + E(h_2)$$

$$\therefore\ I(h_1) - I(h_2) \approx E(h_2) - E(h_2)\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2$$

$$= E(h_2)\left[1 - \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2\right]$$

De aquí podemos despejar $E(h_2)$:

$$E(h_2) \approx \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2}$$

$$\therefore\ I = I(h_2) + \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2}$$

En el caso especial cuando $h_2 = \frac{h_1}{2}$ (que es el algoritmo de Romberg), tenemos:

$$I \approx I(h_2) + \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - 2^2}$$

$$\therefore\ I \approx \frac{4}{3} I(h_2) - \frac{I(h_1)}{3}$$

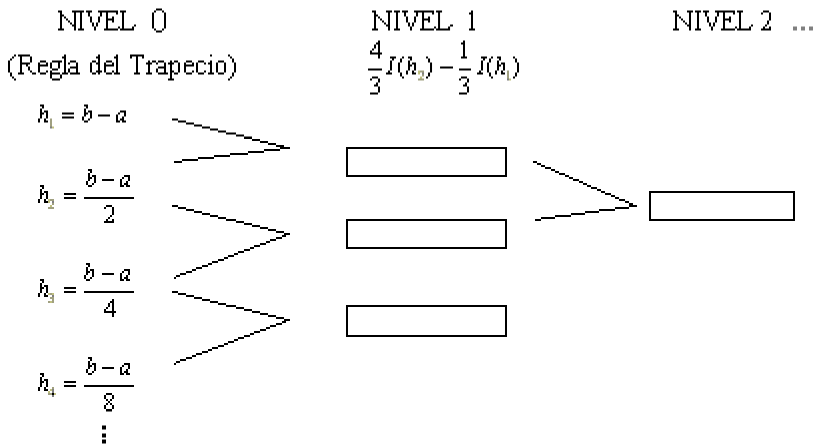
Esta fórmula es solo una parte del algoritmo de Romberg. Para entender el método, es conveniente pensar que se trabaja en niveles de aproximación. En un primer nivel (que llamamos 0), es cuando aplicamos la regla del Trapecio, y para poder usar la fórmula anterior, debemos de duplicar cada vez el número de subintervalos: así, podemos comenzar con un subintervalo, luego con dos, cuatro, ocho, etc., hasta donde se desee.

Posteriormente, pasamos al segundo nivel de aproximación (el 1), que es donde se usa la fórmula anterior, tomando las parejas contiguas de aproximación del nivel anterior, y que corresponden cuando $h_2 = \frac{h_1}{2}$.

Después pasamos al tercer nivel de aproximación (el 2), pero aquí cambia la fórmula de Romberg, y así sucesivamente hasta el último nivel, que se alcanza cuando solo contamos con una pareja del nivel anterior.

Desde luego, el número de niveles de aproximación que se alcanzan, depende de las aproximaciones que se hicieron en el nivel 0. En general, si en el primer nivel, iniciamos con *n* aproximaciones, entonces alcanzaremos a llegar hasta el nivel de aproximación *n*.

Hacemos un diagrama para explicar un poco más lo anterior.



<u>Ejemplo 1</u>.

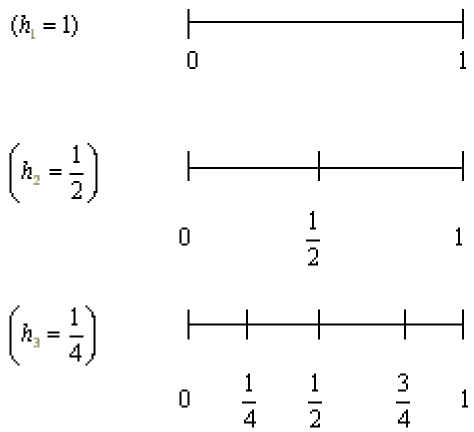
Usar el algoritmo de Romberg, para aproximar la integral

$$\int_0^1 e^{x^2}dx$$

usando segmentos de longitud $1,\frac{1}{2},\frac{1}{4}$.

***Solución*.**

Primero calculamos las integrales del nivel 1, usando la regla del trapecio para las longitudes de segmentos indicadas:



Con estos datos, tenemos:

$$I(h_1) = \frac{1-0}{2}\left[e^{0^2} + e^{1^2}\right] = 1.859140914$$

$$I(h_2) = \frac{1-0}{4}\left[e^{0^2} + 2e^{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + e^{1^2}\right] = 1.571583165$$

$$I(h_3) = \frac{1-0}{8}\left[e^{0^2} + 2\left[e^{\left(\frac{1}{4}\right)^2} + e^{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + e^{\left(\frac{3}{4}\right)^2}\right] + e^{1^2}\right] = 1.490678862$$

Ahora pasamos al segundo nivel de aproximación donde usaremos la fórmula que se dedujo anteriormente:

$$\frac{4}{3}I(h_2) - \frac{1}{3}I(h_1)$$

donde $I(h_1)$ es la integral menos exacta (la que usa menos subintervalos) e $I(h_2)$ es la más exacta (la que usa el doble de subintervalos).

En un diagrama vemos lo siguiente:

$$1.859140914$$

$$\frac{4}{3}(1.571583165) - \frac{1}{3}(1.859140914) = 1.475730582$$

$$1.571583165$$

$$\frac{4}{3}(1.490678862) - \frac{1}{3}(1.571583165) = 1.463710761$$

$$1.490678862$$

Para avanzar al siguiente nivel, debemos conocer la fórmula correspondiente. De forma similar a la deducción de la fórmula,

$$\frac{4}{3}I(h_2) - \frac{1}{3}I(h_1)$$

se puede ver que la fórmula para el siguiente nivel de aproximación (nivel 3) queda como sigue:

$$\frac{16}{15}I_m - \frac{1}{15}I_l$$

dónde:

I_m es la integral más exacta

I_l es la integral menos exacta

En el siguiente nivel (nivel 4) se tiene la fórmula

$$\frac{64}{63} I_m - \frac{1}{63} I_l$$

En el ejemplo anterior, obtenemos la aproximación en el nivel 3 como sigue:

$$\frac{16}{15}(1.463710761) - \frac{1}{15}(1.475730582) = 1.46290944$$

Así, podemos concluir que el valor de la aproximación, obtenido con el método de Romberg en el ejemplo 1, es:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx 1.46290944$$

<u>Ejemplo 2</u>.

Usar el algoritmo de Romberg para aproximar la integral:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

Agregando a la tabla anterior $I(h_4)$ donde $h_4 = \frac{1}{8}$.

***Solución*.**

Calculamos $I(h_4)$ con la regla del trapecio:

$$I(h_4) = \frac{1-0}{16}\left[e^{0^2} + 2\left[e^{\left(\frac{1}{8}\right)^2} + e^{\left(\frac{1}{4}\right)^2} + e^{\left(\frac{3}{8}\right)^2} + e^{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + e^{\left(\frac{5}{8}\right)^2} + e^{\left(\frac{3}{4}\right)^2} + e^{\left(\frac{7}{8}\right)^2}\right] + e^{1^2}\right]$$
$$I(h_4) = 1.469712276$$

Tenemos entonces la siguiente tabla:

$$\begin{array}{llll}
1.859140914 & & & \\
 & 147573082 & & \\
1.571583165 & & 1.46290944 & \\
 & 1.463710761 & & 1.462653593 \\
1.490678862 & & 1.462657591 & \\
 & 1.462723414 & & \\
1.469712276 & & &
\end{array}$$

De donde concluimos que la aproximación buscada es:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx 1.462653593$$

Ejemplo 3.

Aproximar la siguiente integral:

$$\int_1^2 e^x \ln x dx$$

usando el método de Romberg con segmentos de longitud

$$h_1 = 1 \text{ , } h_2 = \frac{1}{2} \text{ , } h_3 = \frac{1}{4} \text{ , } h_4 = \frac{1}{8}$$

***Solución*.**

Igual que arriba, primero usamos la regla del trapecio (con los valores de *h* indicados) para llenar el nivel 1. Tenemos entonces que:

$$I(h_1) = \frac{2-1}{2}\left[e^1 \ln 1 + e^2 \ln 2\right] = 2.560851701$$

$$I(h_2) \frac{2-1}{4}\left[e^1 \ln 1 + 2e^{1.5} \ln 1.5 + e^2 \ln 2\right] = 2.189010122$$

$$I(h_3) = \frac{2-1}{8}\left[e^1 \ln 1 + 2\left(e^{\frac{5}{4}} \ln \frac{5}{4} + e^{\frac{3}{2}} \ln \frac{3}{2} + e^{\frac{7}{4}} \ln \frac{7}{4}\right) + e^2 \ln 2\right] = 2.09430857$$

$$I(h_4) = \frac{2-1}{16}\left[e^1 \ln 1 + 2\left[e^{\frac{1}{8}} \ln \frac{1}{8} + e^{\frac{2}{8}} \ln \frac{2}{8} + \cdots + e^{\frac{7}{8}} \ln \frac{7}{8}\right] + e^2 \ln 2\right] = 2.070524501$$

A continuación, usamos las fórmulas de Romberg para cada nivel y obtenemos la siguiente tabla:

2.560851701			
	2.065062929		
2.189010122		2.062586615	
	2.062741385		2.062586821
2.094308569		2.062586818	
	2.062596478		
2.070524501			

De donde concluimos que la aproximación buscada es:

$$\int_1^2 e^x \ln x dx \approx 2.062586821$$

Podemos escribir una fórmula general para calcular las aproximaciones en cada uno de los niveles como sigue:

ALGORITMO DE INTEGRACIÓN DE ROMBERG

El método, tomando en cada reiteración una división a la mitad del intervalo, se define de forma recursiva así:

$$R(0,0) = \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b))$$
$$R(n,0) = \frac{1}{2}R(n-1,0) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}} f(a+(2k-1)h_n)$$
$$R(n,m) = R(n,m-1) + \frac{1}{4^m-1}(R(n,m-1) - R(n-1,m-1))$$

o

$$R(n,m) = \frac{1}{4^m-1}(4^m R(n,m-1) - R(n-1,m-1))$$

donde

$$n \geq 1$$
$$m \geq 1$$
$$h_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

La cota superior asintótica del error de R(n,m) es:

$$O\left(h_n^{2^{m+1}}\right).$$

La extrapolación a orden cero ***R(n,0)*** es equivalente a la Regla del trapecio con ***n+2*** puntos. La de orden uno ***R(n,1)*** es equivalente a la Regla de Simpson con ***n+2*** puntos.

El proceso se suele realizar hasta que se cumpla alguna de las condiciones, según sea la necesidad:

Error absoluto: $\in_a = |R(n,m) - R(n,m-1)| \leq \epsilon$

Error relativo: $\in_r = \left|\frac{R(n,m)-R(n,m-1)}{R(n,m)}\right| \leq \epsilon$

Error relativo porcentual: $\in_{rp} = \left|\frac{R(n,m)-R(n,m-1)}{R(n,m)}\right| * 100 \leq \epsilon$

donde ϵ es una cota suficiente de error, definida en forma absoluta, relativa o porcentual según corresponda.

Ejemplo 1.

Aplicar el algoritmo de integración de Romberg a la integral:

$$\int_1^3 \frac{e^x}{x}dx$$

tomando $\epsilon_s = 0.01\%$

Solución.

En este caso no sabemos exactamente cuantas aproximaciones debemos hacer con la regla del trapecio. Así que para comenzar hacemos los cálculos correspondientes a uno, dos, cuatro y ocho subintervalos:

$$R(0,0) = \frac{3-1}{2}\left[\frac{e^1}{1} + \frac{e^3}{3}\right] = 9.413460803$$

$$R(1,0) = \frac{3-1}{4}\left[\frac{e^1}{1} + 2\left(\frac{e^2}{2}\right) + \frac{e^3}{3}\right] = 8.401258451$$

$$R(2,0) = \frac{3-1}{8}\left[\frac{e^1}{1} + 2\left(\frac{e^{1.5}}{1.5} + \frac{e^2}{2} + \frac{e^{2.5}}{2.5}\right) + \frac{e^3}{3}\right] = 8.131024374$$

$$R(3,0) = \frac{3-1}{16}\left[\frac{e^1}{1} + 2\left(\frac{e^{1.25}}{1.25} + \frac{e^{1.5}}{1.5} + \frac{e^{1.75}}{1.75} + \frac{e^2}{2} + \frac{e^{2.25}}{2.25} + \frac{e^{2.5}}{2.5} + \frac{e^{2.75}}{2.75}\right) + \frac{e^3}{3}\right] = 8.06191719$$

Con estos datos, podemos hacer los cálculos desde el nivel 1 hasta el nivel 3. Tenemos la siguiente tabla:

Nivel 0	*Nivel 1*	*Nivel 2*	*Nivel 3*
9.413460803	8.063857667	8.039418927	8.038733067
8.401258451	8.040946348	8.038743803	
8.131024374	8.038881462		
8.06191719			

Haciendo los cálculos de los errores, nos damos cuenta que efectivamente la aproximación se obtiene hasta el nivel 3, donde $\epsilon_{rp} = 0.008\%$

Por lo tanto, concluimos que la aproximación buscada es:

$$\int_1^3 \frac{e^x}{x}dx \approx 8.038733067$$

EJERCICIOS

1. Usar la regla del trapecio para aproximar,

$$\int_0^6 \frac{\cos x}{x+1} dx$$

i) Dividiendo en un solo intervalo.

ii) Dividiendo en 6 intervalos.

Soluciones: **i)** 3.4115 **ii)** 0.36907

2. Usar la regla de Simpson 1/3 para aproximar,

$$\int_0^4 \sqrt[3]{x} e^x dx$$

i) Dividiendo en un solo intervalo.

ii) Dividiendo en 4 intervalos.

***Soluciones*:** **i)** 82.60511 **ii)** 76.94497

3. Usar la regla de Simpson 3/8 para aproximar,

$$\int_2^4 (\ln x)^3 dx$$

i) Dividiendo en un solo intervalo.

ii) Dividiendo en 4 intervalos.

***Soluciones*:** **i)** 2.76591 **ii)** 2.76501

4. Integrar las siguientes tablas de datos:

i)

x	-4	-1	0	1	1.5	2	2.5
$f(x)$	-8	-3	1	2.5	-5	-1	6

ii)

x	-3	-2	-1	0	0.5	1	1.5	3	4.5
$f(x)$	4.1	2.5	0.3	-0.4	-1	-3.6	0	2.3	5.9

***Soluciones*:** **i)** -17.11458 **ii)** 9.425

5. Usar el algoritmo de integración de Romberg para aproximar,

$$\int_1^6 \ln x \ln(x+1)dx$$

i) Usando 1, 2 y 4 intervalos.

ii) Agregando al inciso anterior, 8 intervalos.

***Soluciones*: i)** 9.156626413 **ii)** 9.153287278

6. Aproxime la integral del ejercicio anterior, tomando $\epsilon_s = 0.001\%$ como cota suficiente.

***Solución*.** 9.153112082